Ｐ２３４　　「$\sqrt{2}$ は無理数であること」の証明

一つの数を分数で表すとき

$$\frac{3}{5}=\frac{6}{10}=\frac{9}{15}=\cdots\cdot$$

のように表し方は１通りではありません。

$\frac{6}{10}$も$\frac{9}{15}$も約分して$\frac{3}{5}$に直すことはできますが$\frac{3}{5}$は

これ以上簡単な形にすることはできません。

この$\frac{3}{5}$のように、分母と分子が１以外に共通の約数を持たない分数を

既約分数といいます。

どんな分数も、既約分数として１通りに表すことができる。

（１）　$\frac{9}{21}=\frac{3}{7}$　　$\frac{10}{22}=\frac{5}{11}$　　$\frac{12}{23}$　　$\frac{15}{24}=\frac{5}{8}$　　$\frac{20}{25}=\frac{4}{5}$

さて、

$\sqrt{2}$ が無理数でないとしましょう。

すると

$\sqrt{2} = \dfrac{b}{a}$　　$\left(\dfrac{b}{a}\text{は既約分数}\right)$

と表すと

両辺を二乗すると　　$2 = \dfrac{b^2}{a^2}$

$2a^2 = b^2$

左辺よりこの数は偶数であることになります。

なので右辺 b^2 も偶数である。

よって b は偶数である。　・・・・・・①

$b = 2c$　　c は自然数 と表すと

$2a^2 = 4c^2$

$a^2 = 2c^2$

この式から a は偶数である。・・・②

①②より a，b はともに偶数となり ２を共通の約数としてもつこととなり

既約分数であることと矛盾します。

よって $\sqrt{2}$ は無理数である。

（２）

$\sqrt{3}$ が無理数でないとしましょう。

すると$\sqrt{3} = \frac{b}{a}$ $\left(\frac{b}{a} \text{は既約分数} \right)$

両辺を二乗すると

$$3 = \frac{b^2}{a^2}$$

$3a^2 = b^2$

よってb^2は３の倍数である。

よってbは３の倍数である。・・・・・・・・①

$b = 3c$ 　cは自然数　と表すと

$3a^2 = 9c^2$

$a^2 = 3c^2$

よってaは３の倍数である。・・・・・②

①②よりa，bは共通因数３を持つこととなり既約分数であることに矛盾する。

よって$\sqrt{3}$ は無理数である。